19世紀数学の展開とその特徴について-物理学研究と数学研究の関係を中心に-

著者	宮武 克行
号	3
学位授与番号	29
URL	http://hdl.handle.net/10097/36873

宮(みや)　武(たけ)　克(かつ)　行(ゆき)

学位の種類	博　士（国際文化）
学位記番号	国博　第　29　号
学位授与年月日	平成15年9月17日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	東北大学大学院国際文化研究科（博士課程後期3年の課程） 国際文化交流論専攻
学位論文題目	19世紀数学の展開とその特徴について ── 物理学研究と数学研究の関係を中心に ──
論文審査委員	（主査） 教　授　井　原　　聰　　教　授　高　橋　禮二郎 教　授　重　野　芳　人 助教授　劉　　庭　秀 助教授　葉　　　剛

論文内容の要旨

1　研究の目的と意義

19世紀数学は、数学史上最も急速に最も多様に展開し、通常「厳密化の世紀」といわれる。つまり、18世紀までに得られた諸結果が再検討され、数学の基礎概念の見直しが始まり、現代数学が誕生してくる時代である。

ところで「厳密化の世紀」といわれながらも、その厳密化に関しては、これまで詳細に論じられることはなかった。おそらく厳密化それ自体は決して19世紀にのみ特有のものではなく、むしろ数学の歴史は厳密化の歴史といってもよいもので、ことさら厳密化そのものが問われてはいなかったからだといえる。

しかし、19世紀数学の「厳密化」には数学史一般に通底する厳密化の歴史とは様相を異にする「厳密化」が存在すると筆者は考えており、その歴史的な特徴を明らかにし、その歴史的独自性を示す必要があると考える。

また、19世紀数学史における従来の研究は、個別学説史的であるか、または数学者の伝記的内容

のもの（外伝）がほとんどである。後に述べるように19世紀数学はその急速で多様な展開の中から、多くの新しい分野、概念、方法を生み出し、また、それらの相互交渉の中でさらに展開したのであり、その意味で個別学説史的、あるいは列伝的ではなく、19世紀数学を総体として総括する必要があると考える。とりわけこの急速で、多様な展開が数学の「内部」だけで進行したものではなく、19世紀の物理学的諸分野の発展とも深く関わっていた。したがって総体としてとらえるということは、他の分野の諸科学との関連をも考慮することである。

さらに19世紀数学を総体として捉え、その特質を明らかにすることは、現代数学に関わる諸問題を考察する上で有効であると考えられる。何故なら、現代数学の抽象性の起源もこの「厳密化」と無関係ではなく、また自然諸科学とりわけ物理学分野からの離脱・自立や論理の自己展開の確立などから生じていると考えられるからである。つまり、現代数学の直接的起源は、学問的枠組みの基本が形成された19世紀数学の形成の中にあるからである。現代数学における抽象性に関する考察をする意味でも、19世紀数学が総括されなければならない。

もちろん、19世紀数学の展開は広範囲にわたっており、そのすべてを網羅することは非常に困難である。本論文でも19世紀前半期の、しかも非ユークリッド幾何学形成と函数概念形成の分野しか取り扱えていない。しかし、非ユークリッド幾何学から生じた公理的な考えと新しい空間概念、また函数的な依存関係やその探求の過程から生じた集合論的な見解は、いずれも現代数学において重要な位置を占めているものであり、19世紀数学を総体として総括し、その歴史的独自性を明らかにするために必要な視点や研究方法を示すことができると考える。

2　研究の対象と方法

19世紀数学を考察するにあたっては、数学研究と物理学研究との関わりに特に注目した。19世紀数学が何を対象とし、どのような課題意識を持っていたのか、またそれにどのよう方法で対応していったのか。これらは、19世紀の展開の中で形成された数学の学問的枠組みに、少なからず反映していると考えられるからであり、数学的な議論や論争はしばしば物理的な課題を論ずる中で行われたからである。

まず、非ユークリッド幾何学形成の過程と函数概念の展開過程を取り上げ、それらがどのような問題関心のもとで、どのような方法によって展開されていったのかを中心に考察し、当該時代に数学が直面していた問題と、その実態について明らかにする。また、それらが数学上の概念形成にどのように作用していったのか検討する。その上で、「厳密化」の構成要素を抽出し、19世紀数学の展開がこの構成要素を軸に論理的展開を果たし、物理学理論との相対的独自性を獲得し、「抽象化」へと展開する経緯を明らかにするものである。

3　論文の構成

序　章　はじめに

第１章　非ユークリッド幾何学の形成と物理学研究

第２章　非ユークリッド幾何学と空間概念

第３章　フーリエ級数と函数概念の展開

第４章　19世紀数学における「厳密化」への新しい傾向

第５章　現代数学の抽象性の起源

第６章　終わりに

4　論文の内容

第１章

第１章では、ガウスが非ユークリッド幾何学形成史において、どのように位置づけられるのかを中心に検討した。彼が何故非ユークリッド幾何学に到達し得たのかについては、多くの先行研究があるが、それらは数学の枠組み内での議論が中心であった。しかし、先行研究においても指摘されるように、ガウスと彼以前の数学者たちの間に数学における論理的な水準の差はない。その差を論ずるのに、いくら数学の枠組み内で議論してみても、明快な解答は得られないのである。非ユークリッド幾何学の認識に際しては、幾何学の仮説性を認識する必要があるが、ここではガウスが幾何学の「仮説性」をどのように捉えていたかが重要となる。先行研究において、非ユークリッド幾何学到達の際に、幾何学の仮説性の認識が必要であることは指摘されているが、ガウスが捉えていた「仮説性」を詳細に論じた研究はこれまでにない。この点を明らかにすることで、ガウスの幾何学に対する見解の独自性が明確となるのである。

そのためには、数学の枠組み内で議論していても不十分である。本章では、ガウスが平行線公準の問題の考察を始めてから、その証明不可能性を認識し非ユークリッド幾何学に到達したとされている1816年頃までの間に、軌道計算による惑星の位置決定のための天文学研究を行っていた事に注目し、それとの関わりについて論じた。これまで、ガウスの天文学研究と非ユークリッド幾何学研究との関わりが論じられたことはほとんどない。本章では、ガウスの非ユークリッド幾何学研究について新しい見解が提示できたと考える。

まず、非ユークリッド幾何学形成の契機となった平行線公準の問題について、ガウスに至るまでを検討した。平行線公準とは、「１直線が２直線に交わり同じ側の内角の和を２直角より小さくするならば、この２直線は限りなく延長されると２直角より小さい角のある側において交わる」というものであるが、ユークリッドが『原論』で提示して以来、その公準としての妥当性が問われていた。何故ならば、公理・公準はその基本的性質として「自明性」が要求されていたからである。平

行線公準は「自明性」に欠けるとされ、それがユークリッドの欠点として捉えられていた。この欠点を補うために、他の公準から平行線公準を導こうとする試みや、もっと簡単で自明な命題で置き換えようとする試みが行われたが、どれも暗然のうちに平行線公準を前提として議論されており循環論法に陥っていた。18世紀になりサッケーリは、彼以前までの議論のこのような点を指摘し、平行線公準を根本的真理と位置づけ、それ故に直接的証明は不可能であることを主張し、間接的証明、すなわち平行線公準の否定を前提にした議論を展開し、矛盾を導こうとした。また彼は、矛盾を導くにあたってその論理的証明の必要性を強調した。

サッケーリの意義は、単に平行線公準を否定するという方法を示しただけではない。それは、彼がユークリッド的な論理の枠組みにあって、部分的にそれを越え、非ユークリッド的な論理を幾何学に導入した点にあるのである。もちろん、平行線公準を根本的真理と位置づけ、その真であることを疑わない彼が、この点を自覚していたわけではない。しかし、「直線の本性」に反することの論理的矛盾を導こうとする彼の論理は、ユークリッド幾何学そのものを否定する論理を必然的に内包させることになったのである。これまで、現代的視点から見ればあるはずのない矛盾を導出したと思いこんだサッケーリの論理的誤謬が強調された評価がなされる傾向が非常に強かったが、この点を見落とせば、サッケーリの評価は一面的なものとならざるをえないのである。

次に、ガウスの研究について論じた。ガウスの最大の功績は、ユークリッド幾何学を相対化した点にある。それまで、絶対的真理として位置づけられていたユークリッド幾何学が、他の幾何学と同等のものと位置づけられることになったのである。このような見解に達した要因は、ガウスが幾何学の「仮説性」を認識したことにある。さらに、ガウスがそれをどのように捉えていたかを検討するには、平行線公準を否定した論理において初めて登場する、不定定数の「仮説性」に対するガウスの見解を検討することが重要である。この不定定数により、論理的には種々の幾何学体系が存在することになるからである。ガウスはこの不定定数を、まずは実在空間としての天文学的空間の観測によって決定しようとしていた。

本章では、ガウスが不定定数を観測によって基礎づけることができた要因の一つに、彼の天文学研究からのアナロジカルな手法によるものであったことを明らかにすることができた。ガウスの天文学研究とは、惑星の軌道計算による位置決定であるが、そこでガウスの目的は、一切の仮説性を排除することであった。というのもニュートンが与えた理論からは、惑星軌道が円錐曲線であることが導かれているだけで、ガウスの時代には、楕円軌道や放物線軌道であることが仮定されて議論されていたからである。ガウスはこの点に不満を感じ、観測によってすべてが演繹的に決定できる方法を模索していたのである。ガウスのこうした研究姿勢が、幾何学研究にも影響を及ぼしていたことは十分に考えられる。

こうしたことを考慮すれば、ガウスは不定定数の決定も観測によって一義的に決定しようとして

いたと考えられる。つまり、観測の結果ユークリッド的であるとは限らないが、それに代わる唯一の幾何学体系がありうるということである。ガウスの不定定数の「仮説性」とは、このようなものであった。従ってそこから導かれる幾何学の「仮説性」には、多様な幾何学体系の並立性が認識されているわけではなかった。その意味で、ガウスの幾何学の「仮説性」は部分的なものに止まっていたといえる。

第２章

第２章では、ロバチェフスキーの幾何学に対する見解を検討し、ガウス以降の非ユークリッド幾何学の展開の方向性について論じた。その上で、非ユークリッド幾何学形成史の再構成を試みた。これまで非ユークリッド幾何学の形成は、その後展開される公理主義的な幾何学の観点から、現代的公理観が形成する過程を数学的な枠内で論じることに力点が置かれていた。物理学からどのような題材を得ながら、幾何学がその対象領域を拡大し、その概念を拡張していったのか、という視点で語られたことはなかった。本章ではそうした視点の重要性を指摘した。

ロバチェフスキーは、幾何学の基礎概念の曖昧さを指摘し、その源泉を自然の諸力による「運動」に求め再検討を行う。そこでロバチェフスキーは、自然の諸力に対応して、それぞれの幾何学体系があり得ることを指摘する。このように、ロバチェフスキーが幾何学に対応させていたものは、自然界の諸力に基づく「運動」であった。当然、「運動」の数だけ幾何学が存在することになる。もちろん、このことをロバチェフスキーが証明しているわけではない。彼自身もその必要性を明確に述べるに止まっている。しかし、多様な幾何学体系が並立的に存在しうるという指摘は、後の幾何学の展開において重要な位置を占めている。

ガウスにはこうした見解はなかった。彼が幾何学に対応させていたのは、実在空間としての天文学的空間であった。従って、真の幾何学は唯一であり、このような見解を持つガウスに多様な幾何学体系の並立的な存在など認識されようがなかったのである。このことからも、ガウスの「仮説性」の認識が部分的なものであったことが示される。

ロバチェフスキーが幾何学の基礎概念の源泉を「運動」に求めたことで、新しい幾何学概念の規定がなされるようになった。幾何学の対象が現実の空間のみではなく、種々の「運動」をもその対象として捉えることのできる新しい概念的枠組みが形成されようとしていたのである。いわば、幾何学の対象の拡大が新しい概念の抽象を促しているのである。この傾向は、後のリーマンにおいてより明確になる。彼の多様体幾何学は、古典力学的枠組みに止まらない、自然科学全体を統一するような構想のもと、幾何学のすべての公準を仮説として捉え、現実の空間を多様体の一部として相対化する。もはや幾何学が対象としているのは、現実の空間のみではなく、それを包含する多様体概念へと拡大されたのである。それは新しい空間概念を生み出すこととなった。

また、本章の最後にガウスが非ユークリッド幾何学に到達した時期についての考察を行った。これまで、少なくとも1816年頃には到達していたことが指摘されているが、彼が研究を始めたとされる、1795年頃から1816年までの間の日記や友人への書簡からは、明確に断定することはできない。しかし、天文学研究からの影響という点を考慮すれば、彼の天文学に関する主著が1809年に登場していること、また軌道決定の研究自体は1801年には開始されていることから、もっと早い段階で到達していたと考えることができる。これは、天文学研究との関わりを論じたことによって明らかになったものであり、こうした視点の重要性を示していると考える。

第３章

第３章では、函数概念の展開について、オイラーの時代からコーシーの時代までを中心に論じた。現代数学における函数概念は、19世紀中葉におけるディリクレの函数概念の定義がその原型と言われている。18世紀中葉以降の「函数」概念は、オイラーの与えた定義が標準的なものであったが、そこからディリクレの定義への展開は函数概念のみを考察してきた結果ではなく、「連続」「不連続」概念などと結びついた形で展開されていた。つまり「函数」概念の周辺概念が十分に展開されて初めて函数概念がディリクレ的なものに抽象化されるのである。先行研究において、上述した意味で「函数」概念とその周辺概念との関わりが論じられたことはなかった。本章においては、それらの歴史的な関連性を明らかにすることができた。

18世紀以降、論争の的となっていた「函数」概念は、オイラーが1748年に与えたものであり、現代的な規定に従えばなめらかな函数を指している。微分可能性と連続性との区別はまだなく、「連続」概念は曲線と結びついた形で理解されていた。そして曲線は、質点の力学的運動が描く軌跡として規定されていた。従って、「連続」曲線、「不連続」曲線に関する規定は明確であったが、「連続」函数、「不連続」函数については明確に規定されていなかったのである。先行研究において、この点が明確に区別された形で論じられたことはなかった。「連続」概念が曲線とどのように結びつけられていたかを明確にすることは、オイラーの時代の「函数」と「連続」との関係を知る上で重要である。

オイラー自身は1748年に与えたもの以外にも「函数」の様々な定義を試みている。それは、振動弦の物理的な性質を重視し「函数」概念を拡張しようとしていた結果であった。それは、ダランベールとの相違を見ることでより明確になる。ダランベールは、解析の対象を「連続」曲線に限定し、「不連続」曲線を解析の対象外としていた。それに対して、オイラーは「不連続」曲線もその対象として扱おうとしていたのである。

しかし、オイラーの「連続」「不連続」概念は従来の枠組みのままであった。オイラーやダランベールが論じあった「連続」曲線や「不連続」曲線は、物理的に見ればどちらも連続であり、彼ら

は現代的な意味における連続曲線を考察していたということになる。オイラーが「連続」「不連続」概念をそのように理解している限り、函数の現代的な本質的意義が理解されるはずはなかった。何故ならば、現代的な函数の定義の本質的意義は、不連続函数を想定することで初めて理解されるからである。

18世紀末における微分積分学の基礎概念についての到達段階は、ラグランジュの『解析函数論』を検討することで明確になる。彼は解析学を代数学の論理に帰着させようとした。しかし、代数学は主として有限回の操作を対象としており、また解析学は無限回操作の概念を含んでおり、本質的に両者は異なるものである。ラグランジュにその認識はなく、質的に異なるもを結びつけようとした彼の試みは成功しなかった。つまりこの段階で、無限を含む操作と代数学的な操作との質的な違いが認識されていなかったのである。現代的意味での連続概念到達には、無限についての認識の深化が必要であった。

「連続」概念の変化はフーリエ級数によってもたらされた。フーリエ級数による函数表示は、オイラーの意味での「不連続」曲線のみならず、現代的意味における不連続函数をも包括的に表記できる方法である。当時の「連続」概念や「函数」概念が示す内容よりも、より豊富な内容をフーリエ級数が示す能力を備えていたのである。その結果、種々の概念における新しい規定が必要されるようにとなった。そこで、登場するのが極限概念によって諸概念を基礎づけたコーシーである。

コーシーは、不連続函数の導入によって不可避となった無限概念を取り込んだ形で「極限」概念を規定し、連続概念を規定し直す。彼は、解析学が考察すべき内容と方法とを提示したのである。その際彼が最も注意したのは、「適用範囲」を明確化することであり、最も重要な功績の一つである級数の収束条件についても、この姿勢の下で考察された。こうして、解析学の基礎概念の整備が進み、現代的な函数概念が形成される準備が整うのである。

第４章

本章では、冒頭に述べた19世紀数学の「厳密化」に関する問題関心に基づいて、第１章～第３章で論じられていた代表的な人物（フーリエ、コーシー、ガウス、ロバチェフスキー）の「厳密性」がそれぞれどのようなものであったかを検討し、19世紀数学を「厳密化」の視点から再構成した。

まず、フーリエはその現象論的な態度から、数学的な厳密性には無関心であったことがよく指摘される。しかし、彼の現象論的な態度は、理論的研究と実験的研究の双方の結びつきや関係を正しく理解し、現象を合理的に把握できる方法の探求を示しており、決して数学的な厳密性に無関心であったわけではない。べき級数展開が一般的であったことや、ダニエル・ベルヌーイ以来の議論もあって、フーリエは、三角級数表示の妥当性を詳細に論じる必要があり、具体的計算方法の提示とグラフによる生成的な方法の提示、さらに実験方法の妥当性の精密な検討と、そのような条件の下

で行われた実験結果と理論的帰結との整合性の検討など、あらゆる方法で自らの方法の妥当性と示そうとしていたのである。これがフーリエの「厳密性」であった。

フーリエの時代における解析学的な論理の枠組み（特に「連続」概念）は、オイラー的な枠組みと同じものであった。しかし、フーリエ級数が持つ表示能力は、オイラー的概念の枠組みを越えており、級数の収束性に関する議論や解析学の基礎概念の再検討は、むしろフーリエの三角級数表示の提示によって促されたものである。そしてそれらは、コーシーによって定式化されることになる。

コーシーは、数学の概念や公式などの適用範囲を明確化する必要性を強調した。そして、『解析学教程』などにおいて極限概念を基礎概念と位置づけ、それを形式的・操作的方法で規定した上で、諸概念を極限概念に基づいて構築しようと試みている。解析学的概念の枠組みが変化したのである。こうした彼の研究姿勢は、純粋に解析学的な概念で諸概念を規定しようとするものであったと考えられる。また、数学概念そのものが考察する対象となっており、このことが抽象化の契機となっているとも考えられる。これがコーシーの「厳密性」であった。

コーシーのこうした試みは、数学が独自の対象と方法とを自覚しつつあったと考えることができ、コーシーの適用範囲を明確化しようとする姿勢が、必然的にこうした抽象化の動きを生み出すのである。コーシーが示したこの方向は、後の数学者たちによって引き継がれ、19世紀後半には、直線の連続性に依存していた、実数の連続性にも数学的な規定がなされるようになり、その基礎として自然数が挙げられた。こうして徐々に数学的対象が自覚されるようになるのである。

ガウスの最大の功績はユークリッド幾何学を相対化したことであり、このことは不定定数を現実の空間の観測によって決定しようとする姿勢から生じたものであった。このような基礎づけは、彼の天文学研究からのアナロジカルな手法によって達成されたものであり、その目的は、すべての仮説性を排除し、観測をもとにすべてを演繹的に決定できる方法を探ることであった。ガウスにとって幾何学は、アプリオリに決定されるべきものではなく、観測によって決定されるべきものであった。その意味では、ガウスは幾何学理論の適用されるべき範囲を明確にしようとしていたと考えることができる。ガウスの「厳密性」とはこのようなものであった。

ガウスが幾何学の「仮説性」を部分的にしか捉えられなかったのは、こうしたガウスの「厳密性」に要因がある。観測によって不定定数を一義的に決定しようとしたからである。ロバチェフスキー以降に見られる幾何学体系の並立的な存在を認識することはできなかったのである。

ロバチェフスキーは、幾何学概念の源泉を自然の諸力に基づく「運動」に求め、その再検討を始める。その中で、自然の諸力に応じた種々の幾何学体系の存在を認めるのである。このことは、幾何学の対象の拡大を意味している。それに応じて幾何学の基礎概念の抽象化が進んでいくのである。ロバチェフスキーも不定定数の解決を現実の空間の観測に求めたが、さらに幾何学全体の基礎づけを構想していた。不定定数の基礎づけはその一環である。そのために、彼は必然的に幾何学の基礎

概念の再検討に向かうのである。彼の「厳密性」とはこのようなものである。

その後、リーマンによって幾何学全体系の仮説化が進む。この段階で、現実の空間が相対化され、新しい空間概念が提示されることになる。また、射影的な方法や解析的な方法の相互交渉によって、幾何学の方法が多様化し、様々な幾何学が登場するようになると、それらを包括する概念が必要とされるようになる。クラインのエルランゲン・プログラムはその要請に応えるものであった。このような幾何学の多様化はさらなる抽象化を生み、ヒルベルトの公理主義的な幾何学体系が提示されるようなるのである。

第5章

第５章では、第４章で述べてきた19世紀数学の「厳密化」の構成要素について整理し、現代数学の抽象性との関わりについて考察を行った。まず、「厳密化」の構成要素として、（１）「無限概念に関する認識の深化」、（２）「適用範囲の明確化」、（３）「方法の多様化と分野間での交渉」、（４）「概念的枠組みの変化」、（５）「形成的・操作的定義、記号化と算術化」、（６）「直観から論理へ」、（７）「全体系の公理化」を抽出した。そして、それら相互の関係と、現代数学の抽象性を導くような抽象化がどのように行われようとしていたのかを論じた。本章の考察から、19世紀数学の「厳密化」の特徴を明らかにすることは、現代数学の抽象性の考察にあたって、有効な手段を与えることが示されたものと考える。

平行線公準の問題は、限りなく平行線を延ばすという意味で無限遠の問題である。また、級数は無限項の和であり無限回操作に関する問題である。このような無限に対する認識の深化は、新たな無限概念を提示しその数学的な定式化を生み出し、有限とは根本的に異なる性質を次第に明らかにしていった。無限概念の有限との質的違いが認識されることで、それまでの数学が与えた結果や概念の適用範囲がより注意されるようになる。コーシーによる「収束」概念の定式化は、その典型であった。

ガウスやフーリエらがそれぞれに適用範囲を明確化しようとする姿勢を持ち、またそうした姿勢がその後の展開に引き継がれていったことはすでに指摘した。こうした姿勢は必然的に基礎概念への再検討を促し、数学が対象とすべき領域を明確化していくことにつながっていく。それは、基礎概念の本質を見極めようとする作業であり、数学概念の新しい枠組みを与え、次第に数学独自の対象が自覚されるようになるのである。

また、数学の対象領域の明確化とその拡大は多様な現象の認識とともに生じた。その中で数学的な方法の多様化も進展する。さらに、それらの間での交渉が行われることで、共通した性質が抽象され、より洗練された数学概念が規定されるようになる。

適用範囲を明確化しようとする姿勢や、方法の多様化から生み出された抽象化は、新たな概念的

枠組みを必要とするようになる。そして、新しい枠組みによって数学そのものの再構成が目指されるようになる。コーシーによる解析学の確立は、代数学では十分に取り扱えない無限概念を対象とした分野の成立を意味し、解析学に独自の位置を与えた。また、非ユークリッド幾何学形成は、幾何学体系がアプリオリに決定されているという見解を変え、幾何学概念そのものが変化していった。19世紀に与えられた新たな概念的枠組みの変化は、こうした変化をもたらしたのである。

されれ、このように抽象化された数学的な概念は、次第に直観的な事物から離れていった。例えば、「連続」概念は、曲線と結びついていたが、コーシーによって曲線による規定から離れた。また、デデキントの切断の概念は、実数の連続性を直線の連続性に依拠せず与える方法を提示し実数の形式的な定義を与えた。ペアノの自然数の公理化も同様である。さらに、そうした数概念の形式化を受けて、それまで数を対象としていた代数学は、次第に「数の操作」に関心が向くようになり、数学的操作の枠組みを研究対象とするようになる。また幾何学の公理化も幾何学概念の形式化を生んだ。数学的対象が徐々に直観的事物から離れ、その規定の仕方は形式的なものに変化していく。それは、新しい記号を必要とする。

その結果、数学的論理の妥当性を論じるに際しては、論理的に証明されうるかどうかという点が重要となってくる。そのような傾向は、ワイエルシュトラスにより明確に示され、ワイエルシュトラス的厳密性は、現代数学の指導原理として考えることができる。

さらに、論理的証明の妥当性をめぐる議論から、公理主義的な見解が生まれてくる。数学的対象の実在は、もはや議論の対象ではなく、数学は、あるいくつかの規約に基づいた仮説演繹的体系であるとされ、公理化されるようになるのである。

5　まとめ

1．非ユークリッド幾何学形成史上のサッケーリの意義は、ユークリッド的な枠組みにありながら、非ユークリッド的な論理の枠組みを必然的に導入することになったことであり、サッケーリが論理的誤謬に陥っていたこと点を強調すれば、彼の評価は一面的なものになる。
2．ガウスにおける幾何学の「仮説性」の認識は、現代における仮説演繹的体系としての「仮説性」に対して、部分的なものであり、またそのことがガウスの非ユークリッド幾何学形成史上での特徴を示すものとなっている。その根拠となった不定定数の基礎づけ、すなわち観測によって不定定数を決定するという姿勢は、ガウスの天文学的研究からのアナロジカルな手法によるものであったと考えられる。
3．ロバチェフスキーが幾何学体系の並立的存在を認めることができたのは、彼が幾何学の基礎概念の源泉を「運動」に求めたからであり、この点が、ガウスとロバチェフスキーの明確な相違点である。

4．従来、ガウスが非ユークリッド幾何学に到達した時期について、1816年前後であるという指摘しかなされていなかったが、彼の天文学研究を考慮することによって、もっと早い時期、少なくとも1809年には到達していた可能性がある。

5．「函数」概念は、その周辺概念、特に「連続」概念と密接に関わりながら展開しており、「函数」概念の形成は、他の概念との関わりに注意しながら語られる必要があることを示した。特に、18世紀末から19世紀初頭の解析学の基礎概念の枠組みそのものが変化しており、この点を見落とせばラグランジュやフーリエの評価は一面的なものとなる。

6．19世紀数学の「厳密化」における構成要素を明らかにした。

7．19世紀数学における「厳密性」が詳細に議論されたことはなく、それが指す意味内容を提示することで、19世紀数学の歴史的独自性を示すのに有効な方法を与えることを確認した。また、こうした考察が数学における「抽象化」の意味を考察する上で、有効な方法であることが確認された。

19世紀数学を総体として取り扱い、それと19世紀物理学との相互関連の中から、数学の「内部」だけでは議論しつくせない数学の発展の契機のいくつかを指摘しえた。しかし、リーマンやそれ以降の数学の展開にはさらに多くの物理学諸分野の理論的交渉があり、数理科学の登場との関わりも検討されなければならない。今後の課題の一つでもある。

論文審査結果の要旨

本論文は、現代数学の高度で難解な抽象性が、いつ、どのようにして成立してくるのかを論じたものである。そのために、現代数学の抽象性の起源を19世紀前半期に進められた数学の「厳密化」と関係づけるとともに、自然諸科学とりわけ物理学分野からの自立の過程で、論理的な自己展開を伴いつつ成立してきたことを実証的に論じたものである。序章では、上述の問題視点から19世紀数学を総体として捉え、その特質を明らかにするために、研究の対象として非ユークリッド幾何学形成の過程と函数概念の展開過程を取り上げ、この過程がどのような問題関心のもとで、どのような方法に基づいて展開されていったのかを、当該時代の物理学の展開と関係づけて論じるという基本的研究スタンスを提示している。第1章では、18世紀に展開された「平行線公準」問題を整理し、幾何学の仮説性の問題の契機ともいえる、非ユークリッド幾何学に現れる空間曲率に関わる不定定数をガウスが天文学研究のアナロジーから測定可能としたことを明らかにしている。第2章では、従来、20世紀に登場する公理主義的な立場からの非ユークリッド幾何学形成史の再検討を試み、ガウスとリーマンの間に位置するロバチェフスキーの幾何学の基礎概念の源泉を検討している。特に

1835年のロバチェフスキーの『幾何学の新原理並びに平行線の完全な理論』及び1840年の『平行線論の幾何学的研究』を詳細に検討し、自然の種々な「運動」及び諸力と空間認識とが幾何学の根拠となっていること、そしてその認識が多様な幾何学の存在の承認へとロバチェフスキーを向かわせたことを明らかにしている。また、ガウスは天文学的な実在空間の認識にとらわれために多様な空間の承認に至らず、ロバチェフスキーは多様性を認めながらも「等方・等質性」を排除できなかったこと、さらに、リーマンにいたって空間の「等方・等質性」が排除され、古典力学的枠組みを超えて、自然科学全体を。統一する多様体幾何学に到達する道筋を論じ、非ユークリッド幾何学形成史の再構成を果たしている。第3章では、現代的な函数概念の確立と解析学の整備を論じ、函数概念の展開についてはオイラーの時代の振動弦の研究からコーシーの時代までを論じたものである。現代数学でいう函数概念は、19世紀中葉におけるデイリクレの函数概念の定義がその原型とされているが、ここではフーリエの熱伝導現象研究によるフーリエ級数の登場を契機としてコーシーによる「連続・不連続」、「収束」、「極限」、「微分可能性」など解析学の基礎概念の整備が進められた経緯を明らかにしている。特にフーリエの1806年の「固体内における熱伝導の理論」や彼の主著『熱の解析的理論』(1822年) を詳細に吟味し、熱学的実験研究と数学的解析を詳細に吟味し、熱学的実験研究と数学的解析の相互の役割を認識しつつ従来の力学理論では扱えきれない現象を分析することによって、フーリエ級数の提示が可能となったと結論している。第4章では、19世紀に進行した数学の「厳密化」は一様なものではなく、当該時代の研究者それぞれに固有な特徴をもっていたことを、フーリエ、コーシー、ガウス、ロバチェフスキーらの「厳密性」について検討したものである。そして、その「厳密性」の違いこそが、19世紀数学の発展の要素となっており、やがてリーマンをへて、クラインのエルランゲン・プログラムへと続いたとしている。第5章では、現代数学の抽象性との関わりで、「厳密性」が検討され、数学の対象領域の明確化とその拡大が、多様な現象の認識とともに生じその中で数学的な方法の多様化が進展したとする。また、適用範囲を明確化しようとする姿勢や、新たな概念的枠組みが求められ、デデキント、ペアノ、ワイエルシュトラスへとつながり、現代的数学の指導原理ともいえるワイエルシュトラス的厳密性がうまれ、さらに、論理的証明の妥当性から、公理主義的見解が登場してくる見通しを展開している。

上述のように歴史実証的に詳細な史料調査と解析では優れた成果を上げたといえるが頁配分に不揃いがあり、また、19世紀後半は数学史的見通しとなっていて、自然科学との関連性が希薄となってしまっている。しかし、19世紀の数学の厳密化と物理学的研究の関連性、とりわけ非ユークリッド幾何学が幾何学史的研究だけでは評価が一面的になることを明確に示した意義は高く評価される。さらに、18世紀以前の「数学の厳密化」と19世紀のそれが大きく性格を異にしており、この違いが物理学研究分野からもたらされ、やがて、物理学からも離れて、抽象化を遂げていく流れも明確に示されており、従来の数学史研究に新しい視点を投げかけるものと評価できる。

よって、本論文は、自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示しており、博士（国際文化）の学位論文として合格と認める。